Um fio de comprimento L é carregado com uma carga Q distribuída uniformemente pelo fio, determinar:
a) O vetor campo elétrico num ponto P da reta que contém o fio, $x>L$ (coordenada do ponto P externa ao fio);

b) O vetor campo elétrico para pontos muito afastados do fio, $x \gg L$.

Dados do problema

- comprimento do fio: L;
- carga do fio: Q.

Esquema do problema

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga dq do fio até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto P (o problema é unidimensional, todos os vetores estão no eixo-x, na figura1 os elementos foram desenhados separados para facilitar a visualização)

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

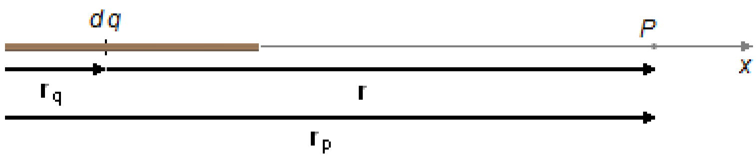

figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cartesianas, vetor $\mathbf{r}_q$, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\,\mathbf{i}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ como $\mathbf{r}_p=D\,\mathbf{i}$, onde D é a distância ao ponto desejado medido a partir do início do fio, então o vetor posição será

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=D\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{i}\\ \mathbf{r}&=(D-x)\,\mathbf{i}\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$\begin{aligned}r^2&=(D-x)^2\\ r&=(D-x)\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Solução

a) O vetor campo elétrico do fio é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda=\frac{dq}{ds}$$

$$d q=\lambda\, d s \tag{IV}$$

onde $d s$ é um elemento de comprimento do fio, assim

$$d s=d x \tag{V}$$

substituindo (V) em (IV)

$$d q=\lambda\, d x \tag{VI}$$

substituindo (I), (II) e (VI) em (III), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, d x}{(D-x)^3}(D-x)\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, d x}{(D-x)^2}\,\mathbf{i} \tag{VII}$$

Como a densidade de carga λ é constante, a integral depende apenas de x, ela pode "sair" da integral, podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{d x}{(D-x)^2}\,\mathbf{i}$$

Os limites de integração serão 0 e L (o comprimento do fio carregado)

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L\frac{d x}{(D-x)^2}\,\mathbf{i}$$

integração de $\displaystyle\int_0^L\frac{d x}{(D-x)^2}$

fazendo a mudança de variável

$$u=D-x$$
$$d u=-d x\Rightarrow d x=-d u$$

fazendo a mudança dos extremos de integração

para $x=0$
temos $u=D-0\Rightarrow u=D$

para $x=L$
temos $u=D-L$

$$\int_D^{D-L}\frac{-d u}{u^2}\Rightarrow-\int_D^{D-L}u^{-2}d u\Rightarrow-\left(\left.\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right|_D^{D-L}\right)\Rightarrow-\left(\left.\frac{u^{-1}}{-1}\right|_D^{D-L}\right)\Rightarrow-\left(\left.-\frac{1}{u}\right|_D^{D-L}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{D-L}-\frac{1}{D}\Rightarrow\frac{D-(D-L)}{D(D-L)}\Rightarrow\frac{D-D+L}{D(D-L)}\Rightarrow\frac{L}{D(D-L)}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{D(D-L)}\,\mathbf{i} \tag{VIII}$$

A densidade linear de carga pode ser escrita

$$\lambda=\frac{Q}{L} \tag{IX}$$

substituindo (IX) em (VIII), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\frac{L}{D(D-L)}\,\mathbf{i}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{D(D-L)}\,\mathbf{i}}$$

e o módulo do campo elétrico será

$$\boxed{E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{D(D-L)}}$$

Observação: como o problema é unidimensional o valor vetorial coincide com o valor escalar do campo elétrico.

b) Para $x=D\gg L$, temos que D tende ao infinito

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lim_{D\to\infty}\frac{Q}{D(D-L)}\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lim_{D\to\infty}\frac{Q}{D^2\left(1-\frac{L}{D}\right)}\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{D^2\left(1-\frac{L}{\infty}\right)}\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{D^2(1-0)}\,\mathbf{i}$$

Observação: na prática não se faz a análise através do limite, dizemos que como L é muito menor que D ($L\ll D$), L pode ser desprezado.

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2}\,\mathbf{i}}$$

e o módulo do campo elétrico será

$$\boxed{E=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2}}$$

e o resultado se reduz ao vetor campo elétrico de uma carga pontual.