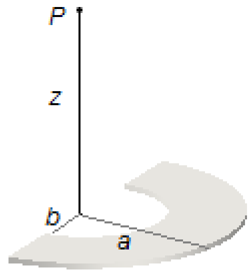
Uma chapa semi-circular possui raio externo *a* e raio interno *b*, conforme figura ao lado. Ela está carregada com uma carga total Q distribuída de forma não uniforme diretamente proporcional ao ângulo central θ do semi-círculo de tal forma que $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Calcule o vetor campo elétrico num ponto *P* sobre o eixo perpendicular ao plano do semi-círculo que passa pelo centro de curvatura a uma distância *z* do seu centro.



Dados do problema

- raio externo do semi-circulo: *a*;
- raio interno do semi-circulo: *b*;
- carga do semi-circulo: *Q*;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: *z*.

Esquema do problema

A densidade superficial de carga do semi-círculo é diretamente proporcional à posição angular da carga (figura 1)

$$\sigma(\theta)=\alpha\,\theta \qquad \text{(I)}$$

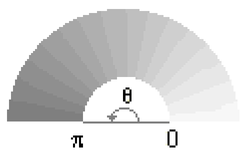


figura 1

onde α é uma constante que torna a expressão dimensionalmente consistente.

O vetor posição **R** vai de um elemento de carga dq do disco até o ponto *P* onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_{q}$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_{p}$ localiza o ponto *P*, assim pela figura 1-A

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}_{p}-\mathbf{r}_{q}$$

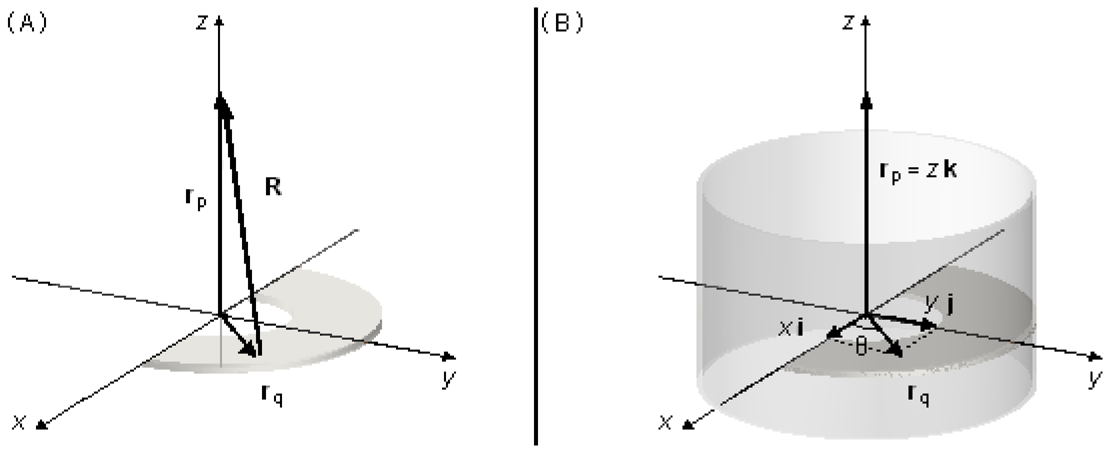


figura 2

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor $\mathbf{r}_{q}$, que está no plano-*xy*, é escrito como $\mathbf{r}_{q}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ e o vetor $\mathbf{r}_{p}$ só possui componente na direção **k**, $\mathbf{r}_{p}=z\,\mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=z\,\mathbf{k}-(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})\\ \mathbf{R}&=-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **R** será

$$
\begin{aligned}
R^2 &= x^2+y^2+z^2\\
R &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{III}
$$

onde *x*, *y* e *z*, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\,\text{sen}\,\theta \quad , \quad z=z \tag{IV}$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{R^2}\frac{\mathbf{R}}{R}\\
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{R^3}\mathbf{R}
\end{aligned}
\tag{V}
$$

Da expressão da densidade superficial de carga (σ) obtemos o elemento de carga dq

$$
\begin{aligned}
\sigma(\theta) &= \frac{dq}{dA}\\
dq &= \sigma(\theta)\,dA
\end{aligned}
\tag{VI}
$$

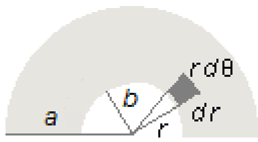


figura 3

onde dA é um elemento de área de ângulo $d\theta$ do disco, assim pela figura 3

$$dA=r\,dr\,d\theta \tag{VII}$$

substituindo (I) e (VII) em (VI)

$$dq=\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta \tag{VIII}$$

substituindo (II), (III) e (VIII) em (V), e como a integração é feita sobre a superfície do semi-círculo (depende de duas variáveis *r* e θ) temos uma integral dupla

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\\
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)
\end{aligned}
\tag{IX}
$$

substituindo as expressões de (III) em (IX), vem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left[(r\cos\theta)^2+(r\,\text{sen}\,\theta)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r\cos\theta\,\mathbf{i}-r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\\
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left[r^2\cos^2\theta+r^2\,\text{sen}^2\theta+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r\cos\theta\,\mathbf{i}-r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\\
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left[r^2\Big(\underbrace{\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta}_{1}\Big)+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r\cos\theta\,\mathbf{i}-r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\\
\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r\,dr\,d\theta}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-r\cos\theta\,\mathbf{i}-r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)
\end{aligned}
$$

Como α é constante e a integral não depende de *z*, depende de *r* e θ, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(-\int\int\frac{r^2\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{i}-\int\int\frac{r^2\,\theta\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{j}+z\int\int\frac{r\,\theta\,dr\,d\theta}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração serão de *b* a *a* em dr (ao longo do raio do disco) e de 0 e π em $d\theta$ (meia volta), e como não existem termos "cruzados" em *r* e θ as integrais podem ser separadas

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(-\int_b^a\frac{r^2\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}-\int_b^a\frac{r^2\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}+z\int_b^a\frac{r\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

colocando a integral $\displaystyle\int_b^a\frac{r^2\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ em evidência re-escrevemos

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a\frac{r^2\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}-\int_0^\pi\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}+z\int_0^\pi d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Integração de $\displaystyle\int_b^a\frac{r\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

fazendo a mudança de variável

$$u=r^2+z^2$$
$$du=2r\;dr\Rightarrow dr=\frac{du}{2r}$$

fazendo a mudança dos extremos de integração

para $r=b$
temos $u=b^2+z^2$

para $r=a$
temos $u=a^2+z^2$

$$\int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\frac{r}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2r}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,du\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{\frac{-3+2}{2}}}{\frac{-3+2}{2}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow-u^{-\frac{1}{2}}\Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\left.\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow-\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

integração de $\displaystyle\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u\,v'=u\,v-\int u'\,v$, escolhemos

$$u=\theta \qquad v'=\cos\theta$$
$$u'=1 \qquad v=\operatorname{sen}\theta$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=\theta\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=\theta\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^\pi-\left(-\cos\theta\,\Big|_0^\pi\right)$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=\theta\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^\pi+\cos\theta\,\Big|_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=\left(\pi.\operatorname{sen}\pi-0.\operatorname{sen}0\right)+\left(\cos\pi-\cos 0\right)$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=\left(\pi.0-0.0\right)+\left(-1-1\right)$$

$$\int_0^\pi \theta\cos\theta\, d\theta=-2$$

integração de $\displaystyle\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u\,v'=u\,v-\int u'\,v$, escolhemos

$$u=\theta \qquad v'=\operatorname{sen}\theta$$
$$u'=1 \qquad v=-\cos\theta$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^\pi-\int_0^\pi -\cos\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \cos\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^\pi+\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\left(\pi.\cos\pi-0.\cos 0\right)+\left(\pi.\operatorname{sen}\pi-0.\operatorname{sen}0\right)$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\left[\pi.(-1)-0.1\right]+\left(2\pi.0-0.0\right)$$

$$\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta=\pi$$

integração de $\displaystyle\int_{0}^{\pi} d\theta$

$$\int_{0}^{\pi} d\theta=\left.\theta\right|_{0}^{\pi}=\pi-0=\pi$$

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\left[-(-2)\,\mathbf{i}-\pi\;\mathbf{j}+z\,\pi\;\mathbf{k}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\left(2\,\mathbf{i}-\pi\;\mathbf{j}+\pi\,z\;\mathbf{k}\right)}$$

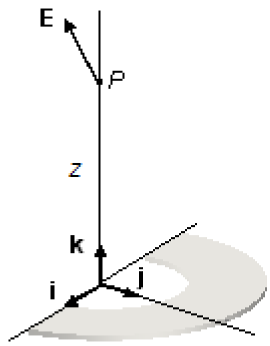


figura 4