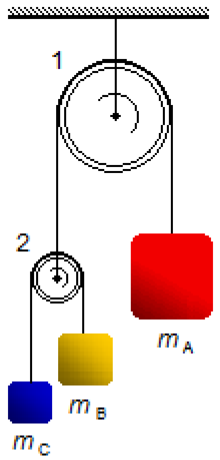
Uma corda passa por uma polia 1 fixa no teto e de massa desprezível. Numa das extremidades existe um bloco de massa m_A = 36 kg, e na outra extremidade um polia 2 móvel também de massa desprezível. Por esta segunda polia passa uma corda em cujas extremidade se encontram corpos de massas m_B = 16 kg e m_C = 8 kg (este sistema é uma máquina de Atwood dupla). Calcular as acelerações das massas e as trações nas cordas. Adote a aceleração da gravidade igual a 10 m/s².



Dados do problema

- massa do corpo *A*: m_A = 36 kg;
- massa do corpo *B*: m_B = 16 kg;
- massa do corpo *C*: m_C = 8 kg;
- aceleração da gravidade: g = 10 m/s².

Esquema do problema

A força peso do corpo *C* ($\vec{P}_C$) produz uma tração $\vec{T}$ na corda, esta é transferida pela corda para o outro lado da polia móvel, esta tração atua na corda que prende o corpo *B* onde atua a força peso $\vec{P}_B$. Na corda da polia móvel atua a tração $2\vec{T}$. Esta tração é transmitida pela corda que passa pela segunda polia (fixa) para o outro lado da polia, e para equilibrar estas duas trações temos na corda que sai da polia uma tração igual a $4\vec{T}$ (figura 1).

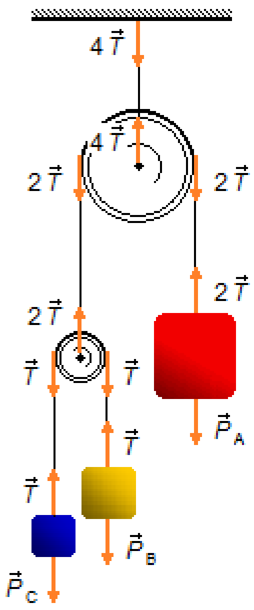


figura 1

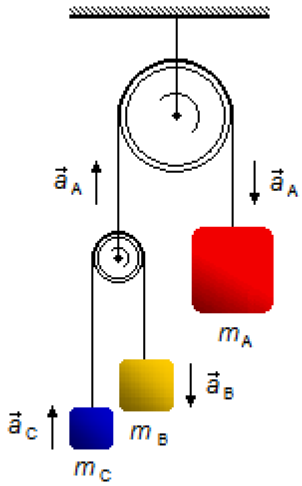


figura 2

Observação: se começássemos pelo corpo *A*, na corda teríamos uma tração $\vec{T}$, transmitida para o outro lado da polia fixa, e equilibrada por uma tração $2\vec{T}$ no teto. Na polia móvel teríamos a tração $\vec{T}$ transmitida pela corda e que se dividira em $\dfrac{\vec{T}}{2}$ para os corpos *B* e *C*.

Solução

Como o bloco *A* tem massa maior que a soma dos outros blocos este desce com aceleração $\vec{a}_A$, a corda que passa pela polia 1 puxa a polia com a mesma aceleração (figura2 – acima). Na segunda polia o bloco *B* possui massa maior que o bloco *C*, então *B* desce com aceleração $\vec{a}_B$ e *C* sobe com aceleração $\vec{a}_C$ (estas acelerações são em relação à polia 1).

Isolando os corpos e pesquisando as forças que agem em cada um deles aplicamos a *2.ª Lei de Newton*

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

Corpo *A:*

- P_A : peso do corpo *A*;
- T : tensão na corda.

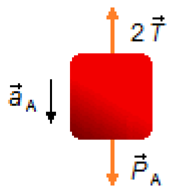


figura 3

Adotamos o sentido positivo no mesmo sentido da aceleração. Na direção horizontal não há forças atuando, na direção vertical temos que a *2.ª Lei de Newton* nos fornece a equação

$$P_A-2T=m_A\,a_A \tag{I}$$

Corpo *B:*

- P_B : peso do corpo *B*;
- T : tensão na corda.

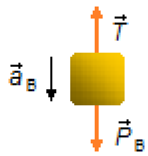


figura 4

Adotamos o sentido positivo no mesmo sentido da aceleração. Na direção horizontal não há forças atuando, na direção vertical temos que a *2.ª Lei de Newton* nos fornece a equação

$$P_B-T=m_B\,a_B \tag{II}$$

Corpo *C:*

- P_C : peso do corpo *C*;
- T : tensão na corda.

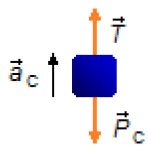


figura 5

Adotamos o sentido positivo no mesmo sentido da aceleração. Na direção horizontal não há forças atuando, na direção vertical temos que a *2.ª Lei de Newton* nos fornece a equação

$$T-P_C=m_C\,a_C \tag{III}$$

Observação: as equações (I), (II) e (III) formam um sistema de três equações a quatro incógnitas (a_A, a_B, a_C e *T*), como existem mais incógnitas do que equações esse sistema será indeterminado.

Consideramos os movimentos dos blocos *B* e *C* em relação à polia móvel e a polia fixa, adotamos um sistema de referência R_I na polia fixa (referencial inercial) e um sistema R_N na polia móvel (referencial não-inercial), conforme figura 6 abaixo.

A polia 2 possui a mesma aceleração que o bloco *A*, portanto a aceleração do referencial nesta polia é mesma do bloco *A*

$$a_{R_N}=a_A \qquad \text{(IV)}$$

Os blocos *B* e *C* possuem, em relação ao referencial não-inercial, a mesma aceleração $\vec{a}$, o que um sobe de um lado o outro desce do outro lado.

A aceleração em relação ao referencial inercial será a soma da aceleração do bloco em relação ao referencial não-inercial com a aceleração do próprio referencial não-inercial.

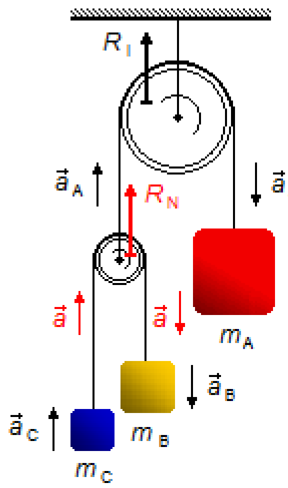


figura 6

Corpo *B*:

$$a_B=a_{B/R_N}+a_{R_N} \qquad \text{(V)}$$

a aceleração em relação ao referencial não-inercial será

$$a_{B/R_N}=-a \qquad \text{(VI)}$$

substituindo (IV) e (VI) em (V), temos

$$a_B=-a+a_A \qquad \text{(VII)}$$

Corpo *C*:

$$a_C=a_{C/R_N}+a_{R_N} \qquad \text{(VIII)}$$

a aceleração em relação ao referencial não-inercial será

$$a_{C/R_N}=a \qquad \text{(IX)}$$

substituindo (IV) e (IX) em (VIII), temos

$$a_C=a+a_A \qquad \text{(X)}$$

Somando as expressões (VII) e (X), temos

$$\begin{array}{c} a_B=-a+a_A \\ a_C=a+a_A \\ \hline a_B+a_C=0+2a_A \\ 2a_A=a_B+a_C \end{array} \qquad \text{(XI)}$$

Com as equações (I), (II), (III) e (XI) acima temos um sistema de quatro equações a quatro incógnitas (a_A, a_B, a_C e T)

$$\left|\begin{array}{ll} P_A-2T=m_A\,a_A & \text{(I)} \\ P_B-T=m_B\,a_B & \text{(II)} \\ T-P_C=m_C\,a_C & \text{(III)} \\ 2a_A=a_B+a_C & \text{(XI)} \end{array}\right.$$

isolando as acelerações a_A, a_B, e a_C nas expressões (I), (II) e (III) e substituindo em (XI), temos

$$a_A=\frac{P_A-2T}{m_A} \qquad \text{(XII)}$$

$$a_B=\frac{P_B-T}{m_B} \qquad \text{(XIII)}$$

$$a_C=\frac{T-P_C}{m_C} \tag{XIV}$$

$$2\left(\frac{P_A-2T}{m_A}\right)=\frac{P_B-T}{m_B}+\frac{T-P_C}{m_C}$$
$$\frac{2P_A-4T}{m_A}=\frac{P_B-T}{m_B}+\frac{T-P_C}{m_C}$$

O módulo das forças peso dos corpos *A, B* e *C* são dadas por

$$P_A=m_A g \qquad \text{e} \qquad P_B=m_B g \qquad \text{e} \qquad P_C=m_C g \tag{XV}$$

substituindo estas expressões na expressão acima temos

$$\frac{2m_A g-4T}{m_A}=\frac{m_B g-T}{m_B}+\frac{T-m_C g}{m_C}$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre m_A, m_B e m_C é $m_A m_B m_C$

$$\frac{2m_A m_B m_C g-4T m_B m_C}{m_A m_B m_C}=\frac{m_A m_B m_C g-T m_A m_C+T m_A m_B-m_A m_B m_C g}{m_A m_B m_C}$$

simplificando os termos $m_A m_B m_C$ no denominador de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$2m_A m_B m_C g-4T m_B m_C=-T m_A m_C+T m_A m_B$$
$$2m_A m_B m_C g=-T m_A m_C+T m_A m_B+4T m_B m_C$$

colocando a tração *T* em evidência do lado direito da igualdade

$$2m_A m_B m_C g=T\left(-m_A m_C+m_A m_B+4m_B m_C\right)$$
$$T=\frac{2m_A m_B m_C g}{-m_A m_C+m_A m_B+4m_B m_C}$$

substituindo os valores numéricos dados no problema, temos

$$T=\frac{2.36.16.8.10}{-36.8+36.16+4.16.8}$$
$$T=\frac{92160}{800}$$
$$T=115{,}2\ \text{N}$$

A tração na corda presa aos corpos *B* e *C* será de **T = 115,2 N**, a tração na corda presa ao corpo *A* e na polia 2 será de **2 T = 2 . 115,2 = 230,4 N** e a tração na corda presa à polia 1 fixa no teto será de **4 T = 4 . 115,2 = 460,8 N**.

Substituindo as forças peso dadas pelas expressões em (XV) nas expressões (XII), (XIII) e (XIV), a tração obtida acima e os dados do problema obtemos as acelerações dos blocos

$$a_A=\frac{m_A g-2T}{m_A}$$
$$a_A=\frac{36.10-2.115{,}2}{36}$$
$$a_A=\frac{360-230{,}4}{36}$$

$$a_A = \frac{129{,}6}{36}$$

$$\boxed{a_A = 3{,}6\ \text{m/s}^2}$$

$$a_B = \frac{m_B g - T}{m_B}$$
$$a_B = \frac{16\,.\,10 - 115{,}2}{16}$$
$$a_B = \frac{160 - 115{,}2}{16}$$
$$a_B = \frac{44{,}8}{16}$$

$$\boxed{a_B = 2{,}8\ \text{m/s}^2}$$

$$a_C = \frac{T - m_C g}{m_C}$$
$$a_C = \frac{115{,}2 - 8\,.\,10}{8}$$
$$a_C = \frac{115{,}2 - 80}{8}$$
$$a_C = \frac{35{,}2}{8}$$

$$\boxed{a_C = 4{,}4\ \text{m/s}^2}$$